7.5.3 Hledání kružnic II

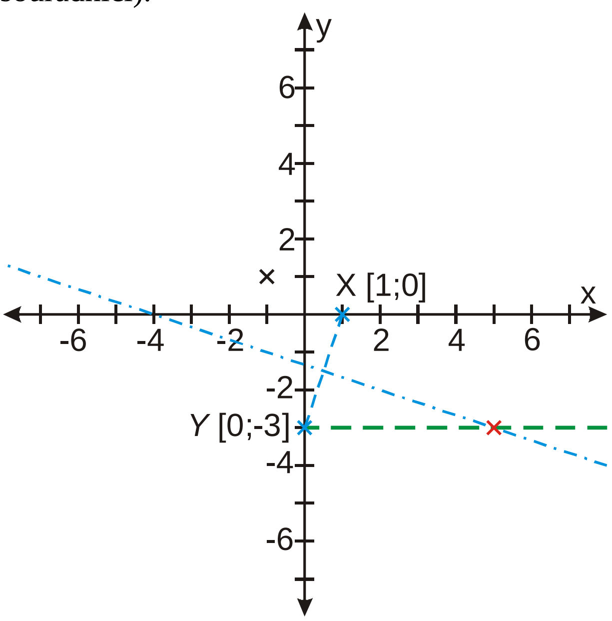
Předpoklady: 7502

Pedagogická poznámka: Tato hodina patří mezi vůbec nejtěžší. Není reálné předpokládat, že by většina studentů dokázala samostatně přijít na řešení, po čase na rozmyšlenou je nutné příklad společně rozebrat a vymyslet postup. Kreslení obrázků je rozhodně lepší provádět na tabuli postupně, než je pouze promítnout z počítače. Pokud studenti mají problémy s výpočtem osy úsečky nebo vzdálenosti dvou bodů, budou na hodině asi zbyteční.
Pokud máte čas, je samozřejmě lepší rozdělit obsah hodiny do dvou vyučovacích hodin.

Pedagogická poznámka: Při počítání v hodině rozdělíme příklady do dvou skupin. Nejdříve řešíme první tři. Nechám studenty přečíst zadání a nakreslit obrázky. Během kreslení je třeba chodit a korigovat, co studenti kreslí. Po zkorigování obrázků nechávám ještě chvilku na rozmyšlení postupu, poté si ho společně ukážeme na tabuli (nakreslené obrázky a postup v bodech nechávám na tabuli). Po vyjasnění postupů studenti příklady samostatně řeší. Přibližně čtvrt hodiny před koncem si začneme stejným způsobem řešit zbývající tři příklady.
Studenti, kteří dokáží najít řešení samostatně, nejsou nijak omezováni.

Př. 1: Najdi kružnici, která se dotýká osy *y* v bodě $Y[0;-3]$ a osu *x* protíná v bodě $X[1;0]$. Urči její další průsečík s osou *x*.

Bod *Y* i bod *X* leží na kružnici $\Rightarrow$ střed kružnice musí ležet na ose úsečky *XY*.
Střed má dvě souřadnice $\Rightarrow$ potřebujeme ještě jednu rovnici. Bod *Y* není obyčejným bodem kružnice, je tečným bodem pro osu *y* $\Rightarrow$ střed kružnice musí ležet na přímce, která je kolmá na osu *y* a prochází bodem $Y[0;-3]$, tedy leží na přímce $y=-3$ (vlastně známe jednu souřadnici).



Hledáme osu úsečky *XY*:

Střed úsečky $S_{XY}\left[\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right]$, $\boldsymbol{u} = X - Y = (1;3) = \boldsymbol{n}_o$.

Rovnice osy: $x+3y+c=0$, dosadíme bod $S_{XY}\left[\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right] \Rightarrow \frac{1}{2}+3\left(-\frac{3}{2}\right)+c=0 \Rightarrow c=4$.

Osa úsečky *XY*: $x+3y+4=0$.

Známe *y*-ovou souřadnici středu: $y=-3 \Rightarrow$ dosadíme do rovnice osy a dopočteme *x*-ovou souřadnici: $x+3y+4 = x+3\cdot(-3)+4=0 \Rightarrow x=5$.

Hledaná kružnice má střed v bodě $S[5;-3]$.

$r=|SY|=\sqrt{(s_1-y_1)^2+(s_2-y_2)^2}=\sqrt{(5-0)^2+(-3-[-3])^2}=5$ (bylo jasné zpaměti).

Rovnice kružnice: $(x-5)^2+(y+3)^2=25$.

Pro průsečík s osou *x* platí $y=0$, dosadíme do rovnice kružnice:

$$(x-5)^2+(y+3)^2=(x-5)^2+(0+3)^2=25$$

$$(x-5)^2+9=25$$

$$x^2-10x+25=16$$

$$x^2-10x+9=0$$

$$(x-9)(x-1)=0$$

První průsečík $X_1[1;0]$ (známe ze zadání), druhý průsečík $X_2[9;0]$.

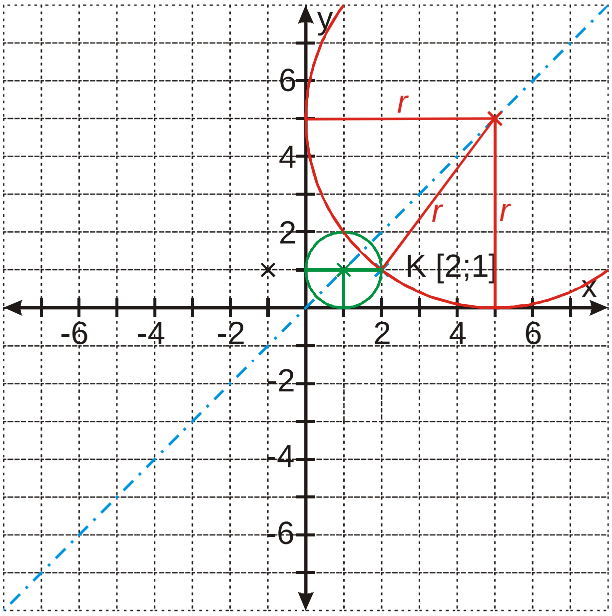
Př. 2: Najdi rovnici kružnice, která se dotýká osy *x* i osy *y* a prochází bodem $K[2;1]$.

Kružnice se dotýká osy *x* i osy *y* $\Rightarrow$ střed kružnice musí ležet na ose těchto dvou přímek, tedy:

- na přímce $y=x \Rightarrow$ střed kružnice má obě souřadnice stejné $S[x;x]$,
- nebo na přímce $y=-x \Rightarrow$ souřadnice středu jsou čísla navzájem opačná $S[x;-x]$.

Co vyplývá z informace „kružnice prochází bodem $K[2;1]$“?

- Střed kružnice určitě leží v prvním kvadrantu $\Rightarrow$ na přímce $y=x$.
- Střed kružnice je od bodu *K* stejně daleko jako od tečných bodů na obou osách $\Rightarrow$ $|Sy|=|Sx|=|SK|$.



$|Sy| = |SK|$

$|x| = \sqrt{(x-k_1)^2 + (x-k_2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (x-1)^2}$

$|x| = \sqrt{(x-2)^2 + (x-1)^2} \quad /^2$ (obě strany kladná čísla $\Rightarrow$ žádný problém se zkouškou a ještě se zbavíme absolutní hodnoty i odmocniny)

$x^2 = x^2 - 4x + 4 + x^2 - 2x + 1$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

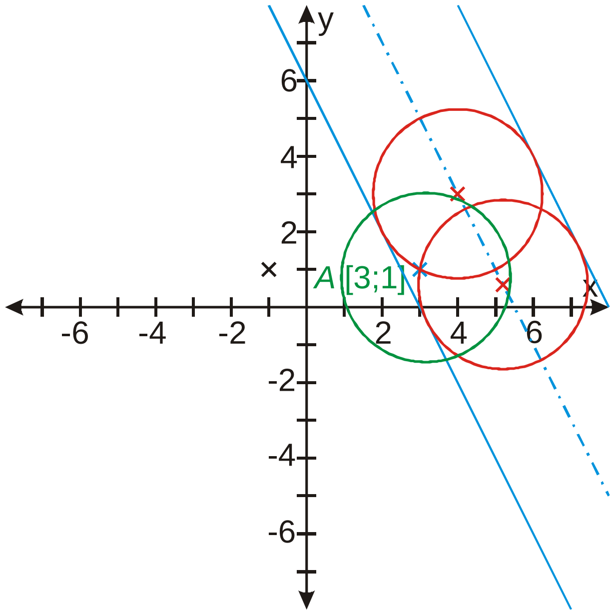
$(x-5)(x-1) = 0$

Dvě řešení:

- $x_1 = 5 \Rightarrow S_1[5;5] \Rightarrow (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$
- $x_2 = 1 \Rightarrow S_2[1;1] \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

Př. 3: Najdi kružnici, která se dotýká přímek $p_1: 2x + y - 6 = 0$, $p_2: 2x + y - 16 = 0$ a prochází bodem $A[3;1]$.

Přímky, kterých se kružnice dotýká, jsou rovnoběžné $\Rightarrow$ střed kružnice musí ležet na ose pásu (přímce, která je s oběma rovnoběžná a od obou stejně vzdálená).
Tím je určen poloměr kružnice (polovina vzdálenosti zadaných přímek). Střed kružnice musí být na ose pásu ve vzdálenosti poloměru kružnice od bodu A.



Osa pásu:

Je rovnoběžná s přímkou $p_1: 2x+y-6=0$ a $p_2: 2x+y-16=0 \Rightarrow$ rovnice $2x+y+c=0$.

Obě zadané přímky mají stejný normálový vektor $\Rightarrow$ hledané c můžeme určit jako průměr těchto koeficientů u obou přímek $c=\frac{-6-16}{2}=-11$.

Osa pásu: $2x+y-11=0$.

Poloměr kružnice:

Libovolný bod přímky $2x+y-6=0$, například pro $y=0$: $2x+0-6=0 \Rightarrow P[3;0]$.

Vzdálenost bodu P od přímky p_2: $|Pp_2|=\frac{|2\cdot 3+0-16|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|-10|}{\sqrt{5}}=\frac{10}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$.

Vzdálenost zadaných přímek je rovna průměru kružnice $\Rightarrow$ $r=\sqrt{5}$.

Nalezení středu:

Střed leží na ose pásu: $2x+y-11=0 \Rightarrow y=11-2x$.

Střed je od bodu $A[3;1]$, vzdálen o $\sqrt{5}$.

$$|AS|=\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2}=\sqrt{5}$$

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=\sqrt{5} \qquad (\text{dosadíme } y=11-2x)$$

$$\sqrt{(x-3)^2+(11-2x-1)^2}=\sqrt{5} \qquad /^2$$

$$(x-3)^2+(10-2x)^2=5$$

$$x^2-6x+9+100-40x+4x^2=5$$

$$5x^2-46x+104=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-46)\pm\sqrt{(-46)^2-4\cdot 5\cdot 104}}{2\cdot 5}=\frac{46\pm 6}{10}$$

- $x_1 = \frac{46+6}{10} = \frac{52}{10} = \frac{26}{5} \Rightarrow y_1 = 11 - 2x = 11 - 2\cdot\frac{26}{5} = \frac{3}{5} \Rightarrow S_1\left[\frac{26}{5};\frac{3}{5}\right]$

  $k_1 : \left(x - \frac{26}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{5}\right)^2 = 5$
- $x_2 = \frac{46-6}{10} = \frac{40}{10} = 4 \Rightarrow y_2 = 11 - 2x = 11 - 2\cdot 4 = 3 \Rightarrow S_2[4;3]$

  $k_2 : (x-4)^2 + (y-3)^2 = 5$

Př. 4: V rovině jsou dány body $A[-1;-3]$, $B[3;-1]$. Najdi výpočtem množinu všech bodů X takových, aby úhel $\sphericalangle AXB$ byl pravý.

Řešení známe, jde o Thaletovu kružnici, ale musíme ji vypočítat. Dvě možnosti:

a) Úhel $\sphericalangle AXB$ je pravý, právě když vektory $X - A$ a $X - B$ jsou na sebe kolmé.

$X - A = (x+1; y+3)$ $\qquad\qquad$ $X - B = (x-3; y+1)$

Vektory jsou kolmé, právě když je jejich skalární součin roven nule $\Rightarrow$ $(X-A)(X-B) = 0$.

$(x+1)(x-3) + (y+3)(y+1) = 0$

$x^2 - 3x + x - 3 + y^2 + 3y + y + 3 = 0$

$x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0$ (určitě jde o obecnou rovnici kružnice, najdeme středový tvar)

$x^2 - 2x\cdot 1 + 1^2 - 1^2 + y^2 + 2y\cdot 2 + 2^2 - 2^2 = (x-1)^2 + (y+2)^2 - 5 = 0$

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5 \Rightarrow S[1;-2]$, $r = \sqrt{5}$

Odpovídá předpokladům, střed kružnice je i středem úsečky *AB*.

b) Úhel $\sphericalangle AXB$ je pravý, právě když pro strany trojúhelníku *ABX* platí Pythagorova věta.

$|AX|^2 + |BX|^2 = |AB|^2$

$|AX| = \sqrt{(x+1)^2 + (y+3)^2}$ $\qquad\qquad$ $|BX| = \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2}$

$|AB| = \sqrt{(-1-3)^2 + (-3-[-1])^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Dosadíme do Pythagorovy věty: $(x+1)^2 + (y+3)^2 + (x-3)^2 + (y+1)^2 = 20$.

$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 + x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 20$

$2x^2 - 4x + 2y^2 + 8y = 0$

$x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0$ $\qquad$ (stejná rovnice jako v předchozí variantě, nebudeme počítat dál)

Pedagogická poznámka: Minimálně někteří studenti nebudou chápat, proč jsme rovnou neprohlásili, že řešením je kružnice se středem ve středu úsečky *AB*. Je potřeba jim ještě jednou zdůraznit, že jsme ze zadání „nevěděli“, že hledanou množinou bodů je Thaletova kružnice.

Př. 5: Urči množinu všech bodů *X* roviny, které mají od bodu $A[-1;-3]$ dvakrát větší vzdálenost než od bodu $B[3;-1]$.

Teď už nevíme, jaký výsledek máme očekávat.
Podle zadání platí: $|AX| = 2|BX|$.
Vzdálenosti máme určené z předchozího příkladu:
$|AX| = \sqrt{(x+1)^2 + (y+3)^2}$ $\qquad$ $|BX| = \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2}$
Dosadíme:

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y+3)^2} = 2\sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2} \quad /^2$$

$$(x+1)^2 + (y+3)^2 = 4\left[(x-3)^2 + (y+1)^2\right]$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 4\left(x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1\right)$$

$$x^2 + 2x + y^2 + 6y + 10 = 4x^2 - 24x + 36 + 4y^2 + 8y + 4$$

$3x^2 - 26x + 3y^2 + 2y + 30 = 0 \quad /:3$ (musíme zjistit, zda jde o rovnici kružnice. Převádíme na středový tvar)

$$x^2 - \frac{26}{3}x + y^2 + \frac{2}{3}y + 10 = x^2 - 2x\cdot\frac{13}{3} + \left(\frac{13}{3}\right)^2 - \left(\frac{13}{3}\right)^2 + y^2 + 2y\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 10 = 0$$

$$\left(x - \frac{13}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{80}{9} = 0$$

$$\left(x - \frac{13}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{80}{9} \Rightarrow S\left[\frac{13}{3}; -\frac{1}{3}\right],\ r = \sqrt{\frac{80}{9}} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$$

Př. 6: (BONUS) Prohlédni si řešení předchozího příkladu a rozhodni, jak se změní výsledek, pokud bude platit $|AX| = k|BX|$, kde *k* je kladné reálné číslo.

Postupovat budeme stejně, dojdeme k rovnici:

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = k^2\left(x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1\right).$$

Pokud bude platit $k = 1$, druhé mocniny na obou stranách rovnice se odečtou a získáme rovnici přímky (samozřejmé, množinou bodů, které jsou stejně vzdálené od bodů *A* a *B* je osa úsečky *AB*).
Pokud bude platit $k \neq 1$, druhé mocniny na obou stranách rovnice se neodečtou a získáme rovnici, která bude připomínat obecnou rovnici kružnice (museli bychom ještě dokázat, že po úpravě na středovou vyjde kladné číslo na pravé straně. Tedy, že platí $m^2 + n^2 - p > 0$).
Zřejmě to tak dopadne, není důvod, aby se výsledek tak radikálně měnil a jeden bod, který vyhovuje rovnici $|AX| = k|BX|$ najdeme vždy na úsečce *AB*, druhý pak na zbytku přímky *AB*.
Přesto odhad potvrdíme výpočtem:

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = k^2x^2 - 6k^2x + k^2 9 + k^2y^2 + k^2 2y + k^2$$

$$0 = \left(k^2 - 1\right)x^2 + \left(k^2 - 1\right)y^2 - \left(6k^2 + 2\right)x + \left(2k^2 - 6\right)y + 10k^2 - 10$$

Rovnici upravíme na tvar: $x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + p = 0$.

$$\left(k^2 - 1\right)x^2 + \left(k^2 - 1\right)y^2 - 2\left(3k^2 + 1\right)x - 2\left(3 - k^2\right)y + 10\left(k^2 - 1\right) = 0 \qquad /:\left(k^2 - 1\right)$$

$$x^2+y^2-2\frac{\left(3k^2+1\right)}{\left(k^2-1\right)}x-2\frac{\left(3-k^2\right)}{\left(k^2-1\right)}y+10=0$$

Platí: $m=\frac{\left(3k^2+1\right)}{\left(k^2-1\right)}$, $n=\frac{\left(3-k^2\right)}{\left(k^2-1\right)}$, $p=10$.

Podmínka, kterou musí koeficienty splňovat, aby rovnice byla obecnou rovnicí kružnice: $m^2+n^2-p=0$.

Dosadíme: $\left[\frac{\left(3k^2+1\right)}{\left(k^2-1\right)}\right]^2+\left[\frac{\left(3-k^2\right)}{\left(k^2-1\right)}\right]^2-10>0$.

$$\frac{\left(3k^2+1\right)^2}{\left(k^2-1\right)^2}+\frac{\left(3-k^2\right)^2}{\left(k^2-1\right)^2}-10\frac{\left(k^2-1\right)^2}{\left(k^2-1\right)^2}>0$$

$$\frac{9k^4+6k^2+1+9-6k^2+k^4-10k^4+20k^2-10}{\left(k^2-1\right)^2}>0$$

$\frac{20k^2}{\left(k^2-1\right)^2}>0$ - Zlomek obsahuje pouze druhé mocniny $\Rightarrow$ pro $k>0; k\neq 1$ je větší než nula.

Př. 7: Petáková:
strana 124/cvičení 10
strana 124/cvičení 12
strana 124/cvičení 11
strana 124/cvičení 14
strana 124/cvičení 15
strana 124/cvičení 19
strana 124/cvičení 20
strana 124/cvičení 24
strana 124/cvičení 25 b) c)

Shrnutí: Složitější příklady je nutné rozložit na menší části, při jejich počítání pak musíme pořád vědět, co vlastně děláme a jaký to má význam z hlediska celého řešení.